



Od roku szkolnego 2014/2015 matura z matematyki po raz pierwszy będzie sprawdzać poziom opanowania umiejętności zapisanych w podstawie programowej, a nie jak dotychczas – w standardach wymagań egzaminacyjnych. Zdający będą mieli okazję wykazać się znajomością zagadnień, które nie występowały na maturze w poprzednich latach: np. na poziomie podstawowym maturzyści wyznaczają wartości funkcji trygonometrycznych kątów rozwartych, a na poziomie rozszerzonym – stosują pochodne do wyznaczania ekstremum funkcji.

Czego Jaś się nie nauczył...

Jak pokazują rezultaty egzaminu maturalnego z matematyki w 2014 r., poważnym problemem dla zdających są niedostatecznie opanowane umiejętności kształcone w szkole podstawowej i gimnazjum. Na tegorocznej maturze najniższy poziom wykonania, zaledwie 8%, miało zadanie dotyczące dzielenia z resztą:

Udowodnij, że każda liczba całkowita k , która przy dzieleniu przez 7 daje resztę 2, ma tę własność, że reszta z dzielenia liczby $3k^2$ przez 7 jest równa 5.

Najważniejszą przeszkodą dla zdających okazał się w tym przypadku

brak umiejętności zapisania reszty 2 lub 5 przy dzieleniu liczb całkowitych. Bardzo często w rozwiązaniach pojawiały się zapisy typu $k:7 = 1 + 2$ lub $k:7 = 71 + 2$ zamiast poprawnego $k:7 = 1 + \frac{2}{7}$. Z zadaniami na dzielenie z resztą uczniowie spotykają się już podczas nauki w szkole podstawowej, a od gimnazjalistów można oczekiwać, że potrafią zapisać wyrażenie algebraiczne przedstawiające liczbę całkowitą, która dzieli się przez 7 z resztą 2 lub 5. Tymczasem maturzyści albo nie nabyli takiej umiejętności w wcześniejszym etapie kształcenia, albo utracili ją w trakcie opanowywania bardziej zaawansowanych sprawności w szkole ponadgimnazjalnej.

Oto kolejny przykład zadania matu-
ralnego, charakteryzującego się niskim
poziomem wykonania:

Do wykresu funkcji określonej dla wszystkich liczb rzeczywistych wzorem $y = -2^{x-2}$ należy punkt

A. $A = (1, -2)$ B. $B = (2, -1)$
C. $C = (1, \frac{1}{2})$ D. $D = (4, 4)$

Zaledwie 24% maturzystów poprawnie rozwiązało to zadanie. Bardzo liczna grupa absolwentów szkół ponadgimnazjalnych nie odróżnia zapi-

su typu -2^n od $(-2)^n$, wielu z nich nie potrafi dodać dwóch liczb o różnych znakach. Wymienione tu umiejętności nie powinny być obce żadnemu gimnazjaliście, a tymczasem dla przeważającej większości maturzystów rozwiązanie tego zadania było nie lada wyzwaniem.

Egzamin maturalny bada opanowanie umiejętności kształconych w szkole podstawowej, gimnazjum i szkole ponadgimnazjalnej, zatem osoby przystępujące do matury nie powinny być zaskoczone zadaniami odwołującymi się do wiedzy nabytej we wczesnych etapach kształcenia, a nauczyciele liceów i techników muszą wspierać maturzystów w opanowaniu i doskonaleniu tych sprawności. W tym celu należy zdiagnozować, czy uczniowie rozpoczynający naukę na IV etapie edukacyjnym prawidłowo rozumieją pojęcia i w jakim stopniu przyswoili pożądane umiejętności. Jeśli takie badania „na starcie” w liceum przyniosą niezadowalające wyniki, w szczególności gdy występuje realne zagrożenie możliwości realizacji materiału przewidzianego dla szkoły ponadgimnazjalnej, to nieodzowne może się okazać wdrożenie nadzwyczajnego programu nauczania, ponadprzecięt-

nie angażującego samych uczniów. Bez nadzwyczajnych działań i przyjęcia znaczącej części odpowiedzialności za własne kształcenie przez uczniów trudno będzie osiągnąć zadowalający wynik na maturze. Braki z gimnazjum nie powinny być eliminowane kosztem czasu, który w liceum jest przeznaczony na ćwiczenie umiejętności wynikających z programu nauczania.

Drobna zmiana? Tego nie omawialiśmy!

Istotną trudność dla maturzystów stanowi zwykle zrozumienie treści zadania. Na ogół każde, nawet nieznaczne odejście od schematycznego ujęcia zagadnienia powoduje obniżenie poziomu wykonania zadania. Zastanawiające jest szczególnie to, że niższe wyniki uczniowie uzyskują również w przypadku ułatwienia rozwiązywanego problemu lub poszerzenia zakresu możliwości poszukiwania rozwiązania. Nowe, nietypowe czy nieschematyczne sformułowania danego zagadnienia są traktowane przez maturzystów jak niepożądana niespodzianka, nawet gdy upraszczają drogę poszukiwania rozwiązania.

W maju 2014 r. w arkuszu maturalnym znalazło się, jak co roku od 2010 r., zadanie osadzone w kontekście praktycznym, które można rozwiązać za pomocą równania kwadratowego:

Turysta zwiedzał zamek stojący na wzgórzu. Droga łącząca parking z zamkiem ma długość 2,1 km. Łączny czas wędrowki turysty z parkingu do zamku i z powrotem, nie licząc czasu poświęconego na zwiedzanie, był równy 1 godzinie i 4 minuty. Oblicz, z jaką średnią prędkością turysta wchodził na wzgórze, jeżeli prędkość ta była o 1 km/h mniejsza od średniej prędkości, z jaką schodził ze wzgórza.

Prawie 90% zdających podjęło próbę rozwiązania tego zadania, co może oznaczać, że w ramach przygotowań do egzaminu tego typu zadania były powszechnie rozwiązywane. Tymczasem poziom jego wykonania na maturze to zaledwie 13%. Trzeba tu zaznaczyć, że w ciągu czterech poprzednich lat, w przypadku analogicznych poleceń, ten poziom wahał się w przedziale 44–32% i mimo że z każdym rokiem był coraz niższy, to spadek nigdy nie był tak drastyczny jak w tym roku.

“**Ważne jest, żeby w trakcie nauki nie zmarnować okazji do używania wzorów jako nośnika informacji o obiektach, których dotyczą. Na różnych etapach edukacyjnych można zachęcać uczniów do interpretowania własności opisanych wzorami.**”

Najprawdopodobniej przyczyną obniżenia poziomu wykonania zadania była zmiana w sposobie przedstawienia wielkości danych, a konkretnie odmienne sformułowanie informacji o dwóch przedziałach czasu. W podobnych sytuacjach na maturze w latach poprzednich wykorzystywano sformułowania odwołujące się do porównywania dwóch wielkości, np. *pierwszy pociąg przebył trasę w czasie o 40 minut krótszym niż drugi pociąg* albo *pociąg pociąg pociąg pokonuje tę trasę o 1 godzinę krócej niż pociąg osobowy*. W tym roku zamiast porównania podano sumę dwóch wielkości. Okazało się to sporym zaskoczeniem dla maturzystów. Bardzo popularnym błędem przy rozwiązywaniu omawianego zadania było założenie, że podany czas – 1 godzina i 4 minuty – to różnica między czasem pokonania drogi tam i czasem pokonania drogi z powrotem.

Innym błędem pojawiającym się w rozwiązaniach była niepoprawna zamiana

jednostek czasu. Część maturzystów przyjęła, że godzina ma 100 minut, pojawiły się też osoby, dla których godzina ma 10 minut. Przypomnę, że umiejętność zamiany jednostek czasu jest kształtowana na poziomie szkoły podstawowej.

Od lat maturzyści postrzegają zmiany w sposobie ujęcia treści jako wprowadzanie nieznanymi zagadnień. Oto przykład innego popularnego zadania – równanie stopnia trzeciego. W bieżącym roku w arkuszu maturalnym zadanie to było sformułowane w sposób najbardziej typowy:

Rozwiąż równanie
 $9x^3 + 18x^2 - 4x - 8 = 0$.

Wynik uzyskany przez maturzystów, tj. poziom wykonania wynoszący 65%, jest najwyższy za tego typu zadanie w historii matur. W innych latach ten wynik był równy 61%, z wyjątkiem jednego roku, kiedy był wyraźnie niższy. W 2012 r. poziom wykonania zadania wyniósł 53%, bo wtedy zamiast sformułowania *rozwiąż równanie* pojawiło się inne polecenie, choć zadanie sprawdzało tę samą umiejętność, czyli polegało na rozwiązaniu równania stopnia trzeciego:

Liczby $x_1 = -4$ i $x_2 = 3$ są pierwiastkami wielomianu $W(x) = x^3 + 4x^2 - 9x - 36 = 0$. Oblicz trzeci pierwiastek tego wielomianu.

To ułatwienie problemu okazało się dla zdających utrudnieniem.

Nie taki diabeł straszny...

Zmiany w sformułowaniach treści zadań i konieczność poszukiwania nowych modeli matematycznych nie zawsze uczniów zaskakują. W przypadku rachunku prawdopodobieństwa co roku obserwujemy lepsze wyniki, mimo że zadania wymagają za każdym

razem uporania się z nowym sformułowaniem, a treści poszczególnych zadań często nie dają się porównać w prosty sposób.

Oto zadanie z maja 2014:

Ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ losujemy dwa razy po jednej liczbie ze zwracaniem. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A, polegającego na wylosowaniu liczb, z których pierwsza jest większa od drugiej o 4 lub 6.

Za rozwiązanie tego zadania uczniowie uzyskali 54% punktów możliwych do zdobycia. Warto zaznaczyć, że przedstawione przez maturzystów rozwiązania były nacechowane indywidualnym podejściem, niepowtarzalnym sposobem zapisu rozwiązania. Zdarzały się prace maturalne, w których przedstawiano dwa sposoby rozwiązania tego zadania. Oznacza to najprawdopodobniej, że jeśli uczniowie zrozumieją zagadnienie, nie stronią od poszukiwania własnych metod rozwiązania.

Może zatem nauczyciele powinni przeanalizować sytuację, w których uczniowie chętnie rozwiązują zadania

swoimi sposobami i, jeżeli te sposoby są poprawne, docenić inwencję, pozwolić zaprezentować te metody na forum klasy lub grupy. W miarę możliwości trzeba próbować przenieść zapał twórczy także na zagadnienia mniej lubiane i gorzej przyswojone, np. proponować rozwiązywanie zadań, które łączą tematy dobrze opanowane z tymi mniej przyjaznymi.

„**Każdy egzamin maturalny to dla uczniów i nauczycieli poważne wyzwanie edukacyjne, a matura w 2015 r. jest szczególnie ze względu na konieczność łączenia podczas przygotowań doskonalenia umiejętności sprawdzanych po raz pierwszy od wielu lat z próbą eliminowania błędów typowych dla egzaminów z ostatnich lat.**”

Wyniki egzaminów maturalnych z matematyki wyraźnie wskazują, że najchętniej i z najlepszym skutkiem uczniowie podejmują się wykonania tych zadań, w których pojawiają się: potęga o wykładniku 0, poszukiwanie wyrazów ciągu geometrycznego lub arytmetycznego, rozwiązywanie równania kwadratowego, wartość

bezwzględna. Od tych zagadnień warto zacząć przekonywać uczniów do poszukiwania własnych sposobów rozwiązań, a przy ich realizacji eksperymentować z użyciem różnych sformułowań tego samego problemu.

Podstawiamy do wzoru czy nie?

Na maturze na poziomie rozszerzonym najniższy wynik (poziom wykonania 19%) zdający uzyskali za rozwiązanie zadania odwołującego się do własności ciągu geometrycznego:

Ciąg geometryczny (a_n) ma 100 wyrazów i są one liczbami dodatnimi. Suma wszystkich wyrazów o numerach nieparzystych jest sto razy większa od sumy wszystkich wyrazów o numerach parzystych oraz $\log a_1 + \log a_2 + \log a_3 + \dots + \log a_{100} = 100$.

Oblicz a_1 .

„**Nauczyciele powinni przeanalizować sytuację, w których uczniowie chętnie rozwiązują zadania swoimi sposobami i, jeżeli te sposoby są poprawne, docenić inwencję, pozwolić zaprezentować te metody na forum klasy lub grupy.**”

Do rozwiązania tego zadania wystarczyła znajomość podstawowych wzorów opisujących ciągi geometryczne i ich własności. W szczególności po zapisaniu wzoru na n -ty wyraz ciągu geometrycznego i sumę stu wyrazów tego ciągu trzeba było zauważyć relację między sumą wyrazów o numerach parzystych i sumą wyrazów o numerach nieparzystych oraz wykorzystać wynikającą z definicji ciągu geometrycznego zależność między kolejnymi wyrazami, np. opisaną wzorami: $a_2 = a_1 \cdot q$, $a_4 = a_3 \cdot q$, ..., $a_{100} = a_9 \cdot q$. Przy wyznaczaniu ilorazu q ciągu nie musiały pojawić się żadne skomplikowane rachunki, a do rozwiązania zadania





nia potrzebna była jeszcze znajomość wzoru na logarytm sumy. Problemem dla zdających było najwyraźniej wykorzystanie wzorów do wnioskowania, a nie do podstawiania danych.

„Uczeń, który opanuje szereg drobnych umiejętności, będzie mógł otrzymać punkty w zadaniach zamkniętych. W przypadku zadań otwartych egzaminatorzy oceniają całościowe rozumienie zagadnienia.

”

Ważne jest, żeby w trakcie nauki nie zmarnować okazji do używania wzorów jako nośnika informacji o obiektach, których dotyczą. Na różnych etapach edukacyjnych można zachęcać uczniów do interpretowania własności opisanych wzorami – np. we wzorze na pole trójkąta pozwolić dostrzec informację, że wszystkie trójkąty o tej samej wysokości i tej samej podstawie mają równe pola, a ze wzorów na objętość ostrosłupa i graniastosłupa wywnioskować, że graniastosłup ma trzy razy większą objętość niż ostrosłup mający taką samą podstawę i taką samą wysokość jak ten graniastosłup. Wzory można wykorzystać do spraw-

dzenia poprawnego rozumienia pojęć – przykładowo wzory opisujące ciągi arytmetyczne i geometryczne stwarzają możliwość ustalenia, które nieskończone podciągi tych ciągów zachowują arytmetyczność lub geometryczność (np. podciąg wyrazów o numerach parzystych w przypadku ciągu geometrycznego jest nowym ciągiem geometrycznym o ilorazie q^2 , a w przypadku ciągu arytmetycznego – nowym ciągiem arytmetycznym o różnicy $2r$).

Ocenianie matury

Przy sprawdzaniu i ocenianiu arkuszy maturalnych w przypadku zadań otwartych egzaminatorzy zastosują podejście holistyczne. Oznacza to, że liczba punktów przyznanych za rozwiązanie będzie zależać od tego, jak zaawansowane są rozumowanie i działania zmierzające do uzyskania odpowiedzi na pytanie zawarte w zadaniu. Nie będzie zatem oceniania poszczególnych umiejętności, ale docenione zostaną umiejętność planowania rozwiązania i stopień realizacji obranej metody. Uczeń, który opanuje szereg drobnych umiejętności, będzie mógł otrzymać punkty w zadaniach za-

mkniętych. W przypadku zadań otwartych egzaminatorzy oceniają całościowe rozumienie zagadnienia – w razie braku zauważalnego postępu może się okazać, że liczba punktów uzyskana za przedstawione rozwiązanie nie będzie satysfakcjonująca.

Każdy egzamin maturalny to dla uczniów i nauczycieli poważne wyzwanie edukacyjne, a matura w 2015 r. jest szczególna ze względu na konieczność łączenia podczas przygotowań doskonalenia umiejętności sprawdzanych po raz pierwszy od wielu lat z próbą eliminowania błędów typowych dla egzaminów z ostatnich lat.



Józef Daniel

Ekspert Centralnej Komisji Egzaminacyjnej, matematyk o specjalności nauczycielskiej (Uniwersytet Jagielloński); nauczyciel matematyki w liceum ogólnokształcącym; edukator i kierownik grupy matematycznej programu Kreator, odpowiedzialnego za wdrożenie do polskiego systemu nauczania umiejętności kluczowych; redaktor licznych publikacji edukacyjnych, szczególnie z zakresu matematyki.

„Matematykiem postanowiłem zostać trochę na przekór pani profesor z liceum. Nigdy we mnie nie wierzyła, tak mi się przynajmniej wydawało, nie doceniała moich sposobów dochodzenia do rozwiązania. Zazwyczaj zanim skończyłem uzasadniać sensowność własnych pomysłów, musiałem realizować krok po kroku narzucony sposób rozwiązania. A przecież byłem w stanie własnymi metodami wyjaśniać zagadnienia i miałem dobre efekty, co sprawdzałem na znajomych z innych szkół, kiedy tłumaczyłem im matematykę swoimi sposobami. Gdy już zostałem studentem na kierunku matematyka, szybko się przekonałem, że moje własne sposoby są znane innym, są dopuszczalne i można je propagować. To utwierdziło mnie w trafności wyboru kierunku studiów”.



Źródła diagnozy matematycznej

Badania, warsztaty, rekomendacje, narzędzia dla nauczycieli, koncepcja szkół ćwiczeń, „Bydgoski Bąbel Matematyczny”, nowatorskie metody pracy z uczniem – tak Instytut Badań Edukacyjnych działa na rzecz poprawy jakości nauczania matematyki.

Matematyka jest przedmiotem zainteresowania IBE od pierwszego raportu o stanie edukacji *Społeczeństwo w drodze do wiedzy* do ostatniego *Liczą się nauczyciele*. Instytut przeprowadził 10 badań, dzięki którym sporządził diagnozę matematycznych umiejętności uczniów, nauczycieli i osób dorosłych, a także zidentyfikował problemy związane z nauczaniem matematyki. Wypracował rekomendacje dla nauczycieli i narzędzia (dostępne w [Bazie Narzędzi Dydaktycznych](#)), a w ramach programu „Narzędzia w działaniu” wdraża konkretne pomysły na prowadzenie lekcji matematyki. IBE wykorzystał i zanalizował również badania przeprowadzone przez inne podmioty, w tym PISA 2012 (zespół PISA pracuje w IBE), TEDS-m, TIMSS.

Instytut wspiera również nauczanie matematyki przez „Bydgoski Bąbel Matematyczny”, czyli działania grupy samokształceniowej nauczycielek edukacji wczesnoszkolnej. Współpracując ze sobą, wymieniając się doświadczeniami oraz uczestnicząc w szkoleniach prowadzonych przez ekspertów IBE, grupa wypracowała i wprowadziła do swojej codziennej pracy z uczniami nowe podejście do rozwijania umiejętności matematycznych dzieci. Instytut sam wprowadza nowatorskie metody wsparcia nauczania matematyki na etapie wczesnoszkolnym – poprzez gry planszowe i lekcje rytmiki. Poprzez badanie porównywalności wyników egzaminacyjnych oraz kalkulator Edukacyjnej Wartości Dodanej IBE udostępnia narzędzia do oceny pracy szkoły i systemu.

Badania IBE dotyczące kompetencji matematycznych

- [Ogólnopolskie badanie umiejętności trzecioklasistów \(OBUT\)](#);

- [Diagnoza umiejętności matematycznych piętoklasistów \(DUMa\)](#);
- [Diagnoza umiejętności szóstoklasistów \(DUSZa\)](#) – badanie w trakcie realizacji;
- [Diagnoza kompetencji gimnazjalistów](#);
- [Szkoła samodzielnego myślenia](#);
- [Badanie nauczania matematyki w gimnazjum](#);
- [Badanie nauczania matematyki w szkole podstawowej](#) (raport w trakcie opracowywania);
- [Badanie potrzeb nauczycieli edukacji wczesnoszkolnej i matematyki w zakresie rozwoju zawodowego](#) (raport w trakcie opracowywania);
- [Survey of Health, Ageing and Retirement in Europe \(SHARE\)](#), czyli kompetencje osób 50+;
- [Międzynarodowe Badanie Kompetencji Osób Dorosłych PIAAC](#).

Opracowała:
Natalia Skipietrow,
Instytut Badań Edukacyjnych